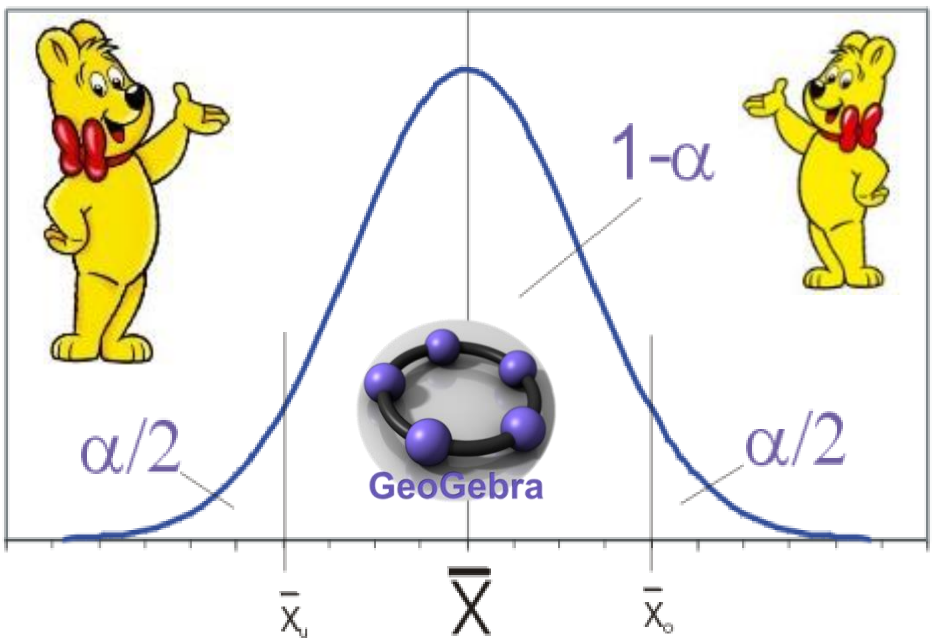
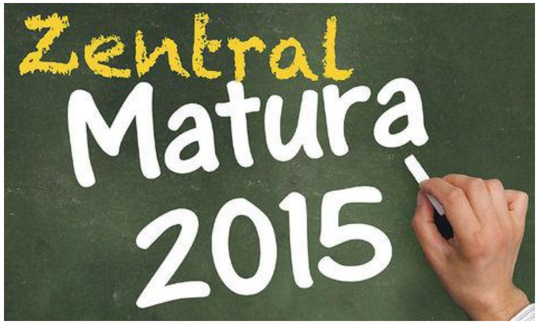
Das Konfidenzintervall und der Goldbär





Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

11. Mai 2015

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

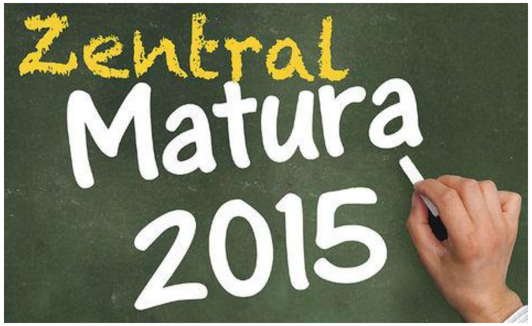
Aufgabe 3

Blutgruppen

c) In einer österreichischen Gemeinde, in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten, nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil. Es wird angenommen, dass die Blutspender/innen eine Zufallsstichprobe darstellen. 72 Blutspender/innen hatten Blutgruppe A.

Berechnen Sie aufgrund dieses Stichprobenergebnisses ein symmetrisches 95%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Einwohner/innen dieser Gemeinde mit Blutgruppe A, die Blut spenden könnten!

$n = 150$ $\qquad$ $k = 72$ $\qquad$ $\gamma = 0{,}95$



Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

15. Jänner 2016

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Aufgabe 24

Breite eines Konfidenzintervalls

Bei einer Meinungsbefragung wurden 500 zufällig ausgewählte Bewohner/innen einer Stadt zu ihrer Meinung bezüglich der Einrichtung einer Fußgängerzone im Stadtzentrum befragt. Es sprachen sich 60% der Befragten für die Einrichtung einer solchen Fußgängerzone aus, 40% sprachen sich dagegen aus.
Als 95-%-Konfidenzintervall für den Anteil der Bewohner/innen dieser Stadt, die die Einrichtung einer Fußgängerzone im Stadtzentrum befürworten, erhält man mit Normalapproximation das Intervall [55,7 %; 64,3 %].

$n = 500 \quad h = 0{,}6 \quad \gamma = 0{,}95$

Intervall [55,7 %; 64,3 %]. n = 500 h = 0,6 γ = 0,95

Aufgabenstellung:

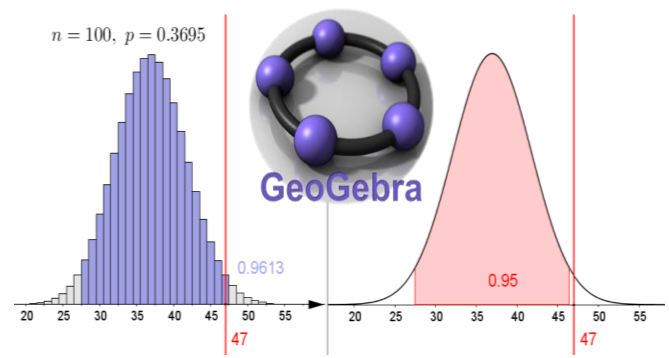
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn man einen größeren Stichprobenumfang gewählt hätte und der relative Anteil der Befürworter/innen gleich groß geblieben wäre. n > 500	☐
Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn man ein höheres Konfidenzniveau (eine höhere Sicherheit) gewählt hätte. γ > 0,95	☐
Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn man die Befragung in einer größeren Stadt durchgeführt hätte.	☐
Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn der Anteil der Befürworter/innen in der Stichprobe größer gewesen wäre. h > 0,6	☐
Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn der Anteil der Befürworter/innen und der Anteil der Gegner/innen in der Stichprobe gleich groß gewesen wären. h = 0,5	☐

Was erwartet sie in der nächsten Stunde?

- Vorstellen einer Unterrichtseinheit zur Simulation einer Umfrage

- Möglichkeiten der Berechnung und Visualisierung von Konfidenzintervallen

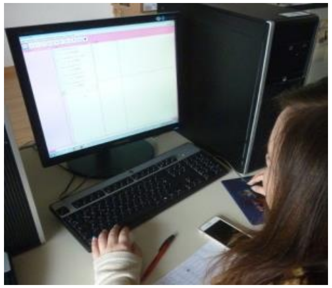


Simulation mit 2000 Minibären

- Vorbereitung
  - 2000 Minibären gezählt nach Farben

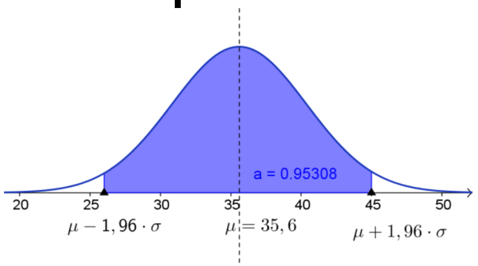
  - Papierteller, Papier, Stifte

  - Taschenrechner, Laptop bzw. PC

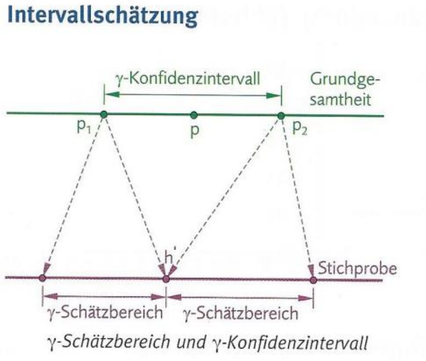


Simulation mit 2000 Minibären

- Vorwissen der Schülerinnen und Schüler
  - Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe
    Ermitteln eines *γ-Schätzbereiches*



  - Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit
    Ermitteln eines *Konfidenzintervalls*

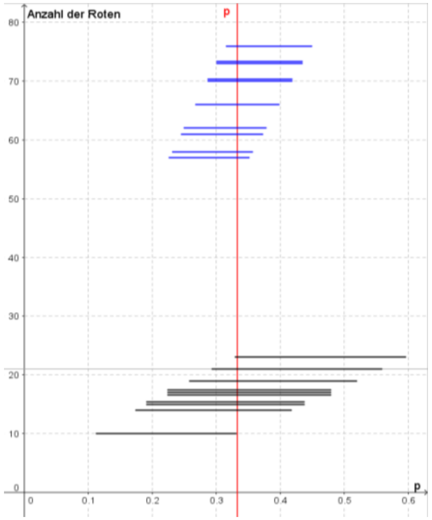


Simulation mit 2000 Minibären

- Ablauf
  - 10 Gruppen mit je 2-3 Schülerinnen und Schülern
  - Ziehen von Zufalls-Stichproben mit Stichprobenumfang n_1=50
  - Dokumentieren nach Anzahl der gezogenen Farben
  - Minibären neu mischen
    jetzt Stichproben mit n_2=200

Simulation mit 2000 Minibären

- Ablauf
  - Ermitteln *von 95%-Konfidenzintervallen* jeweils für die Stichprobenumfänge $n_1 = 50$ und $n_2 = 200$
  - Ermitteln von *γ-Schätzbereichen für γ = 95%*
  - Auswerten mit Excel bzw. Geogebra und Dokumentieren



Stichprobenumfang n= 50 — γ-Schätzbereich für γ=95%

	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4	Gruppe 5	Gruppe 6	Gruppe 7	Gruppe 8	Gruppe 9	Gruppe 10	gesamt	rel. Anteil	xmin	xmax	Intervall für x
grün	12	4	10	5	11	8	8	8	9	9	84	0,168	3,14	13,46	[3; 14]
weiß	9	10	7	14	3	5	8	10	10	10	86	0,172	3,14	13,46	[3; 14]
gelb	10	4	11	9	7	10	11	8	8	7	85	0,170	3,89	14,66	[3; 15]
orange	9	11	5	5	6	8	9	7	8	9	77	0,154	2,53	12,42	[2; 13]
rot	10	21	17	17	23	19	14	17	15	15	168	0,336	10,12	23,18	[10; 24]
	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	500	1,000			

Stichprobenumfang n= 200 — γ-Schätzbereich für γ=95%

													xmin	xmax	Intervall für x
grün	30	37	31	35	31	43	36	27	32	30	332	0,1660	22,89	43,51	[22; 44]
weiß	41	49	30	30	35	31	22	35	28	31	332	0,1660	22,89	43,51	[22; 44]
gelb	34	27	43	39	45	25	37	41	31	49	371	0,1855	26,33	47,87	[26; 48]
orange	29	25	35	26	31	25	32	24	39	33	299	0,1495	20,02	39,78	[20; 39]
rot	66	62	61	70	58	76	73	73	70	57	666	0,3330	53,54	79,66	[53; 80]
	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	2000	1,0000			

relativer Anteil von rot in der Stichprobe mit n=200

0,330	0,310	0,305	0,350	0,290	0,380	0,365	0,365	0,350	0,285

95%-Konfidenzintervalle für das Merkmal roter Minibär

	Stichprobenumfang n= 50				
		"exakt" (Wilson)		Näherung (Wald)	
	rot	pmin	pmax	pmin	pmax
Gruppe 1	10	0,11244	0,33038	0,08913	0,31087
Gruppe 2	21	0,29375	0,55767	0,28319	0,55681
Gruppe 3	17	0,22437	0,47846	0,20869	0,47131
Gruppe 4	17	0,22437	0,47846	0,20869	0,47131
Gruppe 5	23	0,32970	0,59600	0,32185	0,59815
Gruppe 6	19	0,25863	0,51850	0,24546	0,51454
Gruppe 7	14	0,17475	0,41666	0,15554	0,40446
Gruppe 8	17	0,22437	0,47846	0,20869	0,47131
Gruppe 9	15	0,19104	0,43751	0,17298	0,42702
Gruppe 10	15	0,19104	0,43751	0,17298	0,42702

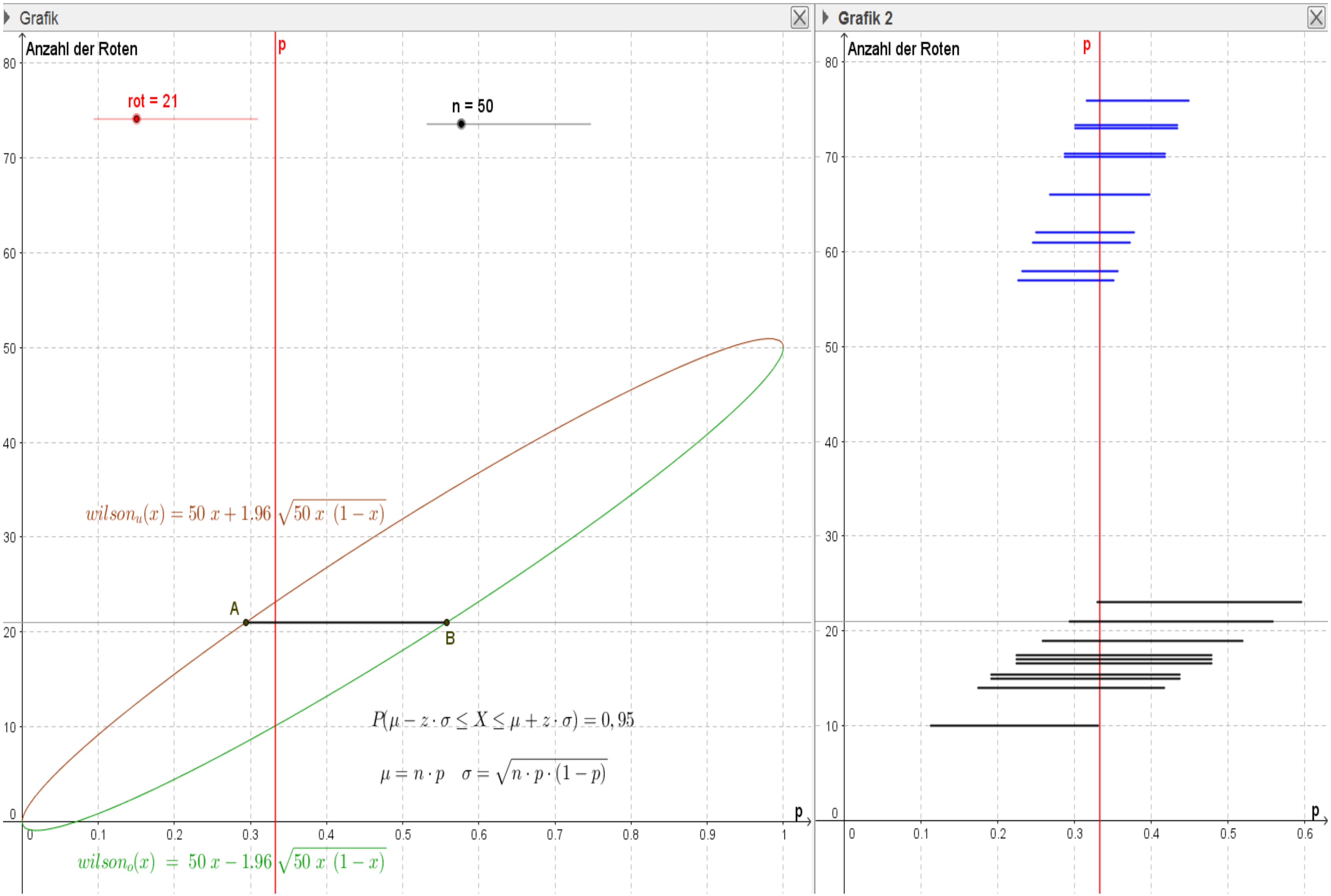
	Stichprobenumfang n= 200				
		"exakt" (Wilson)		Näherung (Wald)	
	rot	pmin	pmax	pmin	pmax
Gruppe 1	66	0,26857	0,39783	0,26483	0,39517
Gruppe 2	62	0,24999	0,37717	0,24590	0,37410
Gruppe 3	61	0,24536	0,37199	0,24119	0,36881
Gruppe 4	70	0,28729	0,41836	0,28390	0,41610
Gruppe 5	58	0,23154	0,35638	0,22711	0,35289
Gruppe 6	76	0,31559	0,44893	0,31273	0,44727
Gruppe 7	73	0,30140	0,43368	0,29828	0,43172
Gruppe 8	73	0,30140	0,43368	0,29828	0,43172
Gruppe 9	70	0,28729	0,41836	0,28390	0,41610
Gruppe 10	57	0,22695	0,35115	0,22244	0,34756

95%-Konfidenzintervalle für rot n=50

	Angaben in %	Breite
Gruppe 1	[11,24 ; 33,04]	21,79
Gruppe 2	[29,37 ; 55,77]	26,39
Gruppe 3	[22,43 ; 47,85]	25,41
Gruppe 4	[22,43 ; 47,85]	25,41
Gruppe 5	[32,97 ; 59,60]	26,63
Gruppe 6	[25,86 ; 51,85]	25,99
Gruppe 7	[17,47 ; 41,67]	24,19
Gruppe 8	[22,43 ; 47,85]	25,41
Gruppe 9	[19,10 ; 43,76]	24,65
Gruppe 10	[19,10 ; 43,76]	24,65

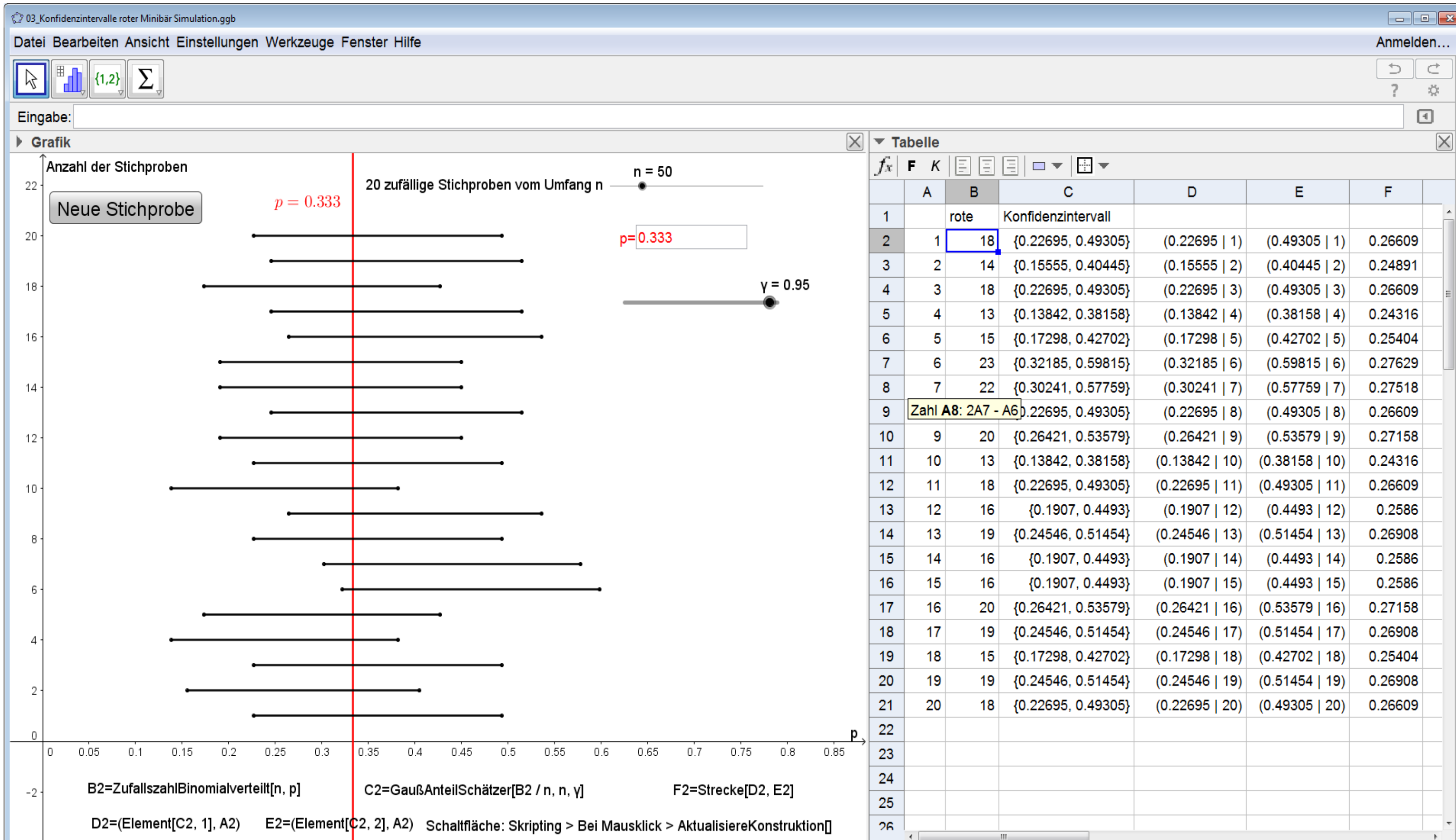
95%-Konfidenzintervalle für rot n=200

Angaben in %	Breite
[26,85 ; 39,79]	12,93
[24,99 ; 37,72]	12,72
[24,53 ; 37,20]	12,66
[28,72 ; 41,84]	13,11
[23,15 ; 35,64]	12,48
[31,55 ; 44,90]	13,33
[30,14 ; 43,37]	13,23
[30,14 ; 43,37]	13,23
[28,72 ; 41,84]	13,11
[22,69 ; 35,12]	12,42



Grafik
Anzahl der Roten
p
rot = 21
n = 50
$wilson_u(x) = 50\,x + 1.96\,\sqrt{50\,x\,(1-x)}$
A
B
$P(\mu - z\cdot\sigma \le X \le \mu + z\cdot\sigma) = 0,95$
$\mu = n\cdot p \quad \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$
$wilson_o(x) = 50\,x - 1.96\,\sqrt{50\,x\,(1-x)}$
Grafik 2
Anzahl der Roten
p

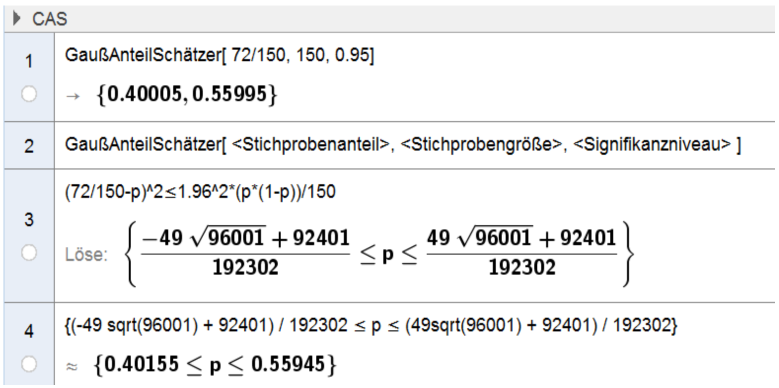
Simulation von 20 Zufalls-Stichproben

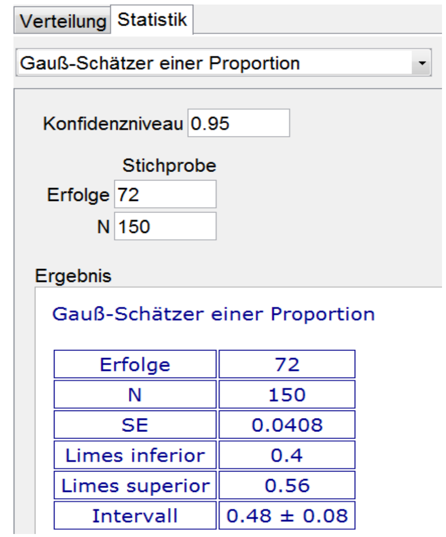


	A	B	C	D	E	F
1		rote	Konfidenzintervall			
2	1	18	{0.22695, 0.49305}	(0.22695 | 1)	(0.49305 | 1)	0.26609
3	2	14	{0.15555, 0.40445}	(0.15555 | 2)	(0.40445 | 2)	0.24891
4	3	18	{0.22695, 0.49305}	(0.22695 | 3)	(0.49305 | 3)	0.26609
5	4	13	{0.13842, 0.38158}	(0.13842 | 4)	(0.38158 | 4)	0.24316
6	5	15	{0.17298, 0.42702}	(0.17298 | 5)	(0.42702 | 5)	0.25404
7	6	23	{0.32185, 0.59815}	(0.32185 | 6)	(0.59815 | 6)	0.27629
8	7	22	{0.30241, 0.57759}	(0.30241 | 7)	(0.57759 | 7)	0.27518
9			.22695, 0.49305}	(0.22695 | 8)	(0.49305 | 8)	0.26609
10	9	20	{0.26421, 0.53579}	(0.26421 | 9)	(0.53579 | 9)	0.27158
11	10	13	{0.13842, 0.38158}	(0.13842 | 10)	(0.38158 | 10)	0.24316
12	11	18	{0.22695, 0.49305}	(0.22695 | 11)	(0.49305 | 11)	0.26609
13	12	16	{0.1907, 0.4493}	(0.1907 | 12)	(0.4493 | 12)	0.2586
14	13	19	{0.24546, 0.51454}	(0.24546 | 13)	(0.51454 | 13)	0.26908
15	14	16	{0.1907, 0.4493}	(0.1907 | 14)	(0.4493 | 14)	0.2586
16	15	16	{0.1907, 0.4493}	(0.1907 | 15)	(0.4493 | 15)	0.2586
17	16	20	{0.26421, 0.53579}	(0.26421 | 16)	(0.53579 | 16)	0.27158
18	17	19	{0.24546, 0.51454}	(0.24546 | 17)	(0.51454 | 17)	0.26908
19	18	15	{0.17298, 0.42702}	(0.17298 | 18)	(0.42702 | 18)	0.25404
20	19	19	{0.24546, 0.51454}	(0.24546 | 19)	(0.51454 | 19)	0.26908
21	20	18	{0.22695, 0.49305}	(0.22695 | 20)	(0.49305 | 20)	0.26609
22						
23						
24						
25						

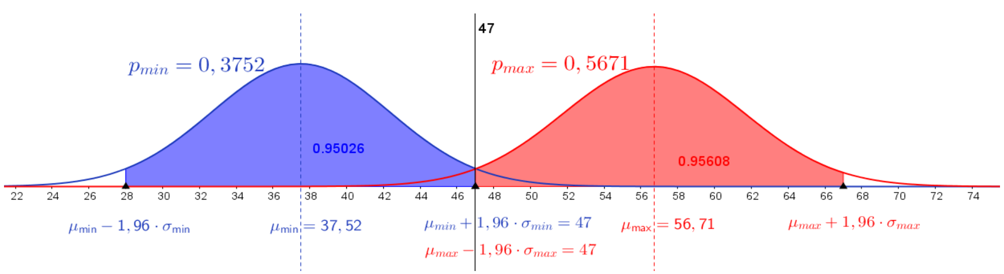
Konfidenzintervalle und GeoGebra

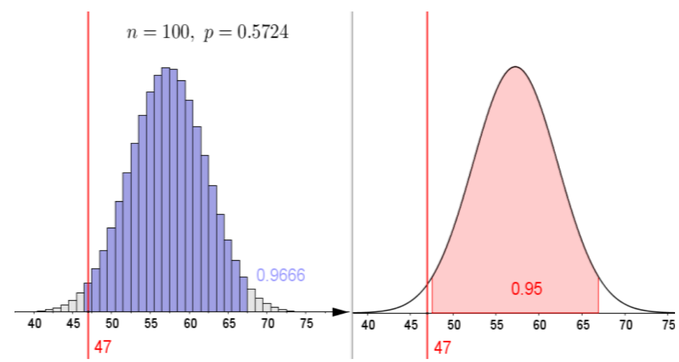
- Ermitteln und Berechnen





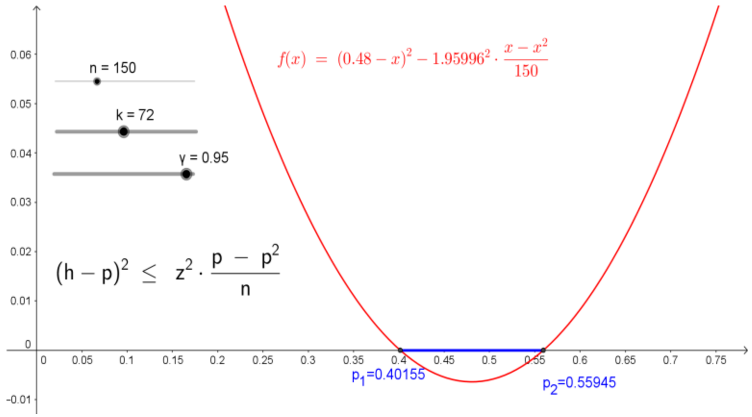
- Visualisieren

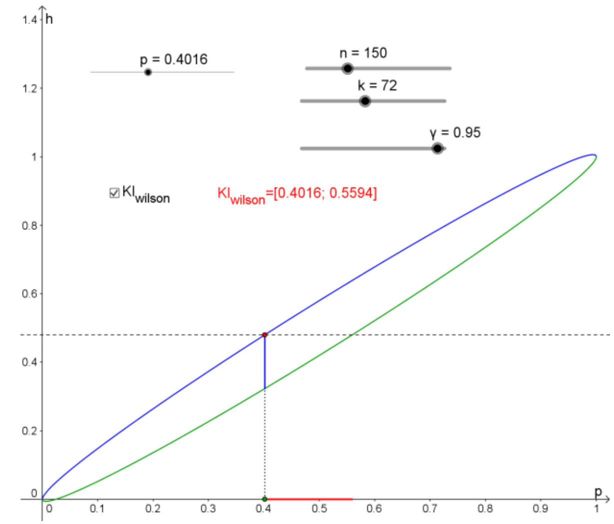




Konfidenzintervalle und GeoGebra

➢ Modellieren

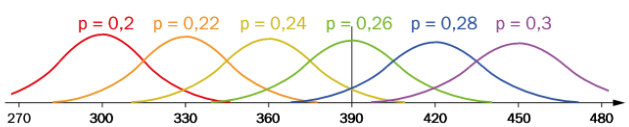




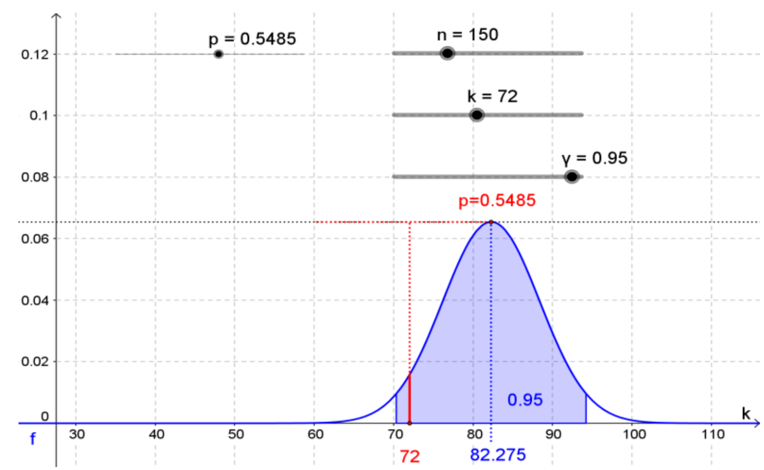
➢ Experimentieren

Wir suchen Gauß'sche Glockenkurven mit den Parametern $\mu = 1\,500\,p$ und $\sigma = \sqrt{1\,500\,(p - p^2)}$, sodass die Anzahl $x = 390$ in einem 99%igen Streubereich liegt:

In der folgenden Darstellung sieht man:
Die Glockenkurven mit $p = 0{,}24$, $p = 0{,}26$ und $p = 0{,}28$ passen.



In den Extremfällen ist 390 entweder die linke Grenze x_1 ($\Rightarrow p_{max}$) oder die rechte Grenze x_2 ($\Rightarrow p_{min}$) des Streubereiches einer Glockenkurve. Wir veranschaulichen die Situation:



Ein wenig Theorie

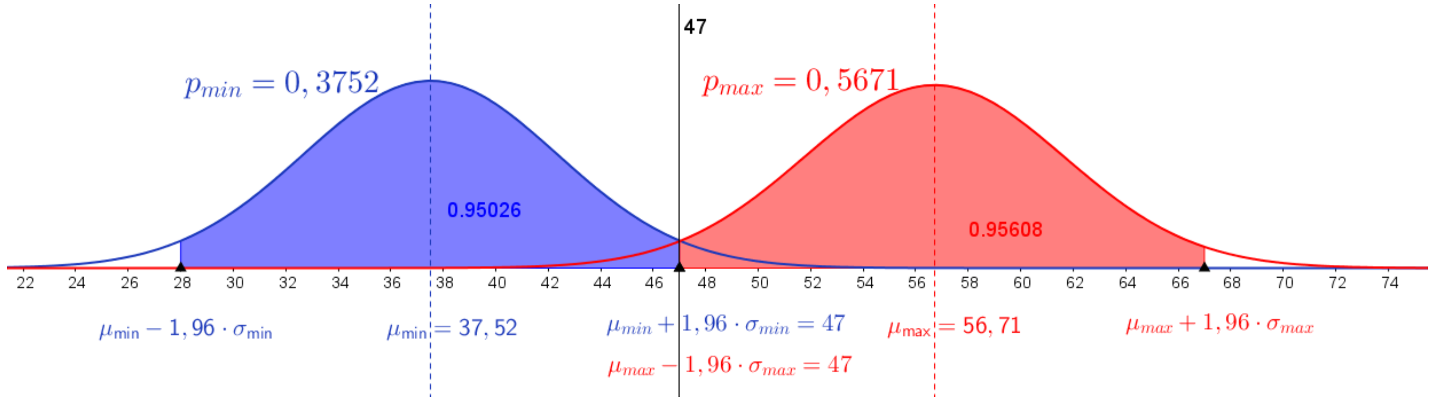
Bevor die Stimmzettel einer Wahl ausgezählt werden, zieht man 100 Stimmzettel zufällig aus den Wahlurnen. Auf 47 Stimmzetteln ist die Partei A angekreuzt. Welchen Anteil der Stimmen hat diese Partei in der Gesamtheit errungen?

n = 100 k = 47 γ = 0,95

Für einen 95% - Schätzereich um μ muss daher für x_{min} = 47 bzw. x_{max} = 47 gelten:

$$x_{min} = \mu - 1{,}96 \cdot \sigma \;\Rightarrow\; 100 \cdot p - 1{,}96 \cdot \sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)} = 47 \quad *) \Rightarrow \quad p_{max} \approx 0{,}57$$

$$x_{max} = \mu + 1{,}96 \cdot \sigma \;\Rightarrow\; 100 \cdot p + 1{,}96 \cdot \sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)} = 47 \quad *) \Rightarrow \quad p_{min} \approx 0{,}37$$

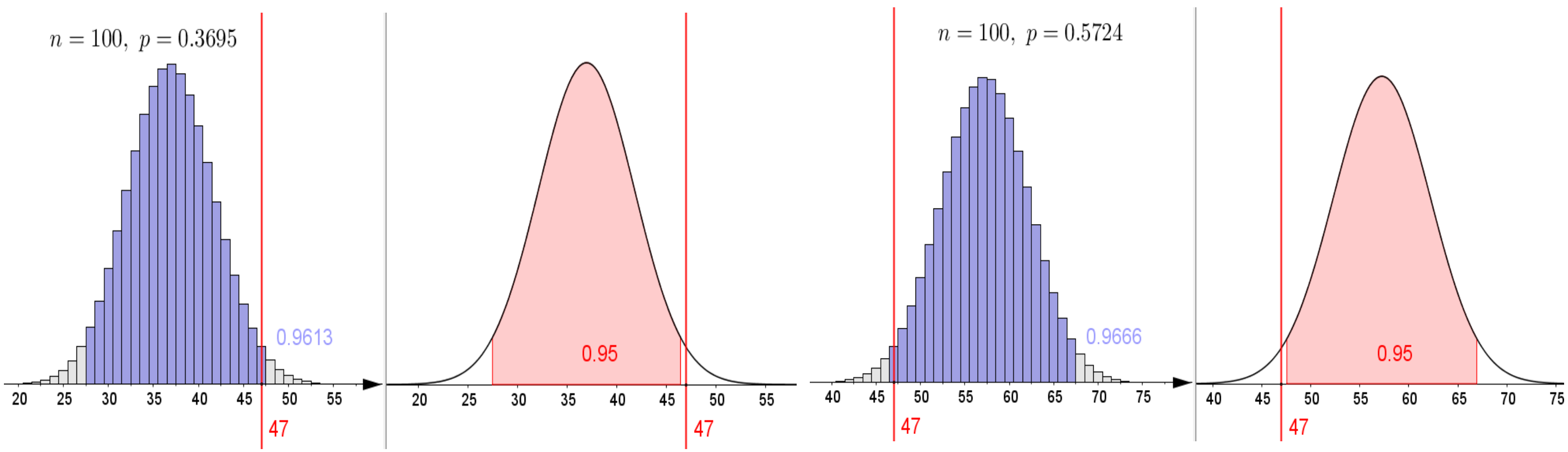


*) *durch numerisches Lösen der Gleichung* $n \cdot p \pm z \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = x$ *nach p*

Ein wenig Theorie

Die obige Abbildung würde nahelegen, dass man die untere Grenze p_{min} aufrunden und die obere Grenze p_{max} des Konfidenzintervalls abrunden muss, weil beim Abrunden der unteren Grenze bzw. Aufrunden der oberen Grenze der 95%-Bereich den Wert $x = 47$ nicht mehr überdecken würde.

*Berücksichtigt man aber, dass man die real vorliegenden Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert hat, ist das **Abrunden der unteren Grenze** und das **Aufrunden der oberen Grenze** des Konfidenzintervalls **gerechtfertigt**.*



Das mit der Binomialverteilung exakt ermittelte Konfidenzintervall ist immer breiter als jenes, das mit der Normalapproximation berechnet wurde!

Ein wenig Theorie

- Näherungsweise Berechnung mit Formel

$$\boldsymbol{KI_{Wald} = \left[h - z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}\ ;\ h + z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]}$$

Ergebnis bei der Berechnung im Algebrafenster oder im CAS mit dem Befehl
GaußAnteilSchätzer[<Stichprobenanteil>, <Stichprobengröße>, <Signifikanzniveau>]

- Lösen einer quadratischen Gleichung mit CAS

$$\boldsymbol{KI_{Wilson} = \left[\frac{1}{n+z^2} \cdot \left(n \cdot h + \frac{z^2}{2} - z \cdot \sqrt{n \cdot h(1-h) + \frac{z^2}{4}} \right); \frac{1}{n+z^2} \cdot \left(n \cdot h + \frac{z^2}{2} + z \cdot \sqrt{n \cdot h(1-h) + \frac{z^2}{4}} \right) \right]}$$

$$n \cdot p \pm z \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = k \ \Rightarrow \ (h-p)^2 = \frac{z^2}{n} \cdot p \cdot (1-p) \quad mit \ \ h = \frac{k}{n} \quad Lösen\ nach\ p$$

$$liefert \quad p_{1,2} = \frac{1}{n+z^2} \cdot \left(n \cdot h + \frac{z^2}{2} \pm z \cdot \sqrt{n \cdot h(1-h) + \frac{z^2}{4}} \right)$$

Ergebnis bei der Berechnung mittels CAS unter Verwendung einer approximierten Normalverteilung

Ein wenig Theorie

- Clopper-Pearson Konfidenzintervall

Exakte Berechnung mit Hilfe der Beta-Verteilung (Excel)

$$p_u = BETAINV\left(\frac{\alpha}{2}; k; n-k+1\right)$$

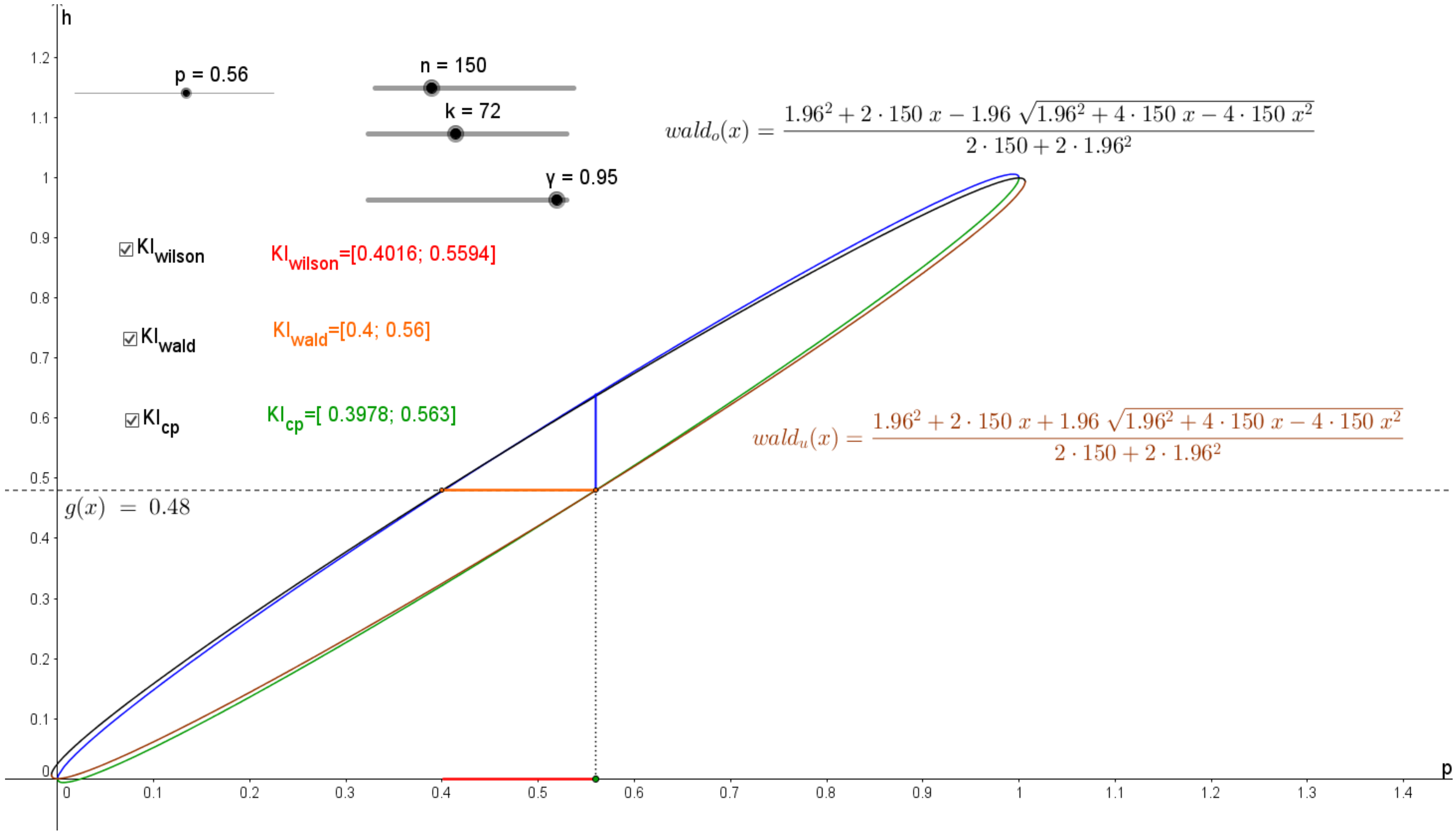
$$p_o = BETAINV\left(1-\frac{\alpha}{2}; k+1; n-k\right) \quad mit \quad \alpha = 1-\gamma$$

oder mit Hilfe der F-Verteilung (Geogebra)

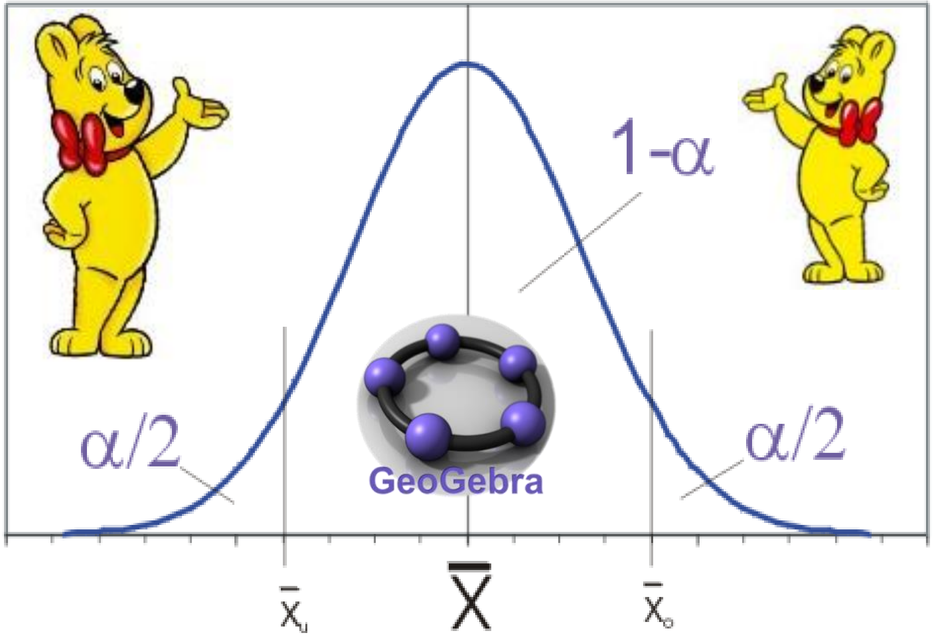
$$p_u := \frac{k}{k + (n - k + 1) InversFVerteilung\left[2 \cdot (n - k + 1),\ 2 \cdot k,\ \frac{1+\gamma}{2}\right]}$$

$$p_o := \frac{(k + 1)\ InversFVerteilung[2 \cdot (k + 1),\ 2 \cdot (n - k),\ \frac{1+\gamma}{2}]}{n - k + (k + 1)\ InversFVerteilung[2 \cdot (k + 1),\ 2 \cdot (n - k),\ \frac{1+\gamma}{2}]}$$

Vergleich zwischen KI_{Wilson} und KI_{Wald} mittels Konfidenzellipsen



Das Konfidenzintervall und der Goldbär



halmath@gmx.net haller.buero@aon.at

https://tube.geogebra.org/material/simple/id/1410927#